

Семинары 6 – 7

Задание 1. Дана бинарная случайная величина X , у которой $P(X = 1) = 0.9$. Рассмотрим 8 независимых измерений этой случайной величины. Какие из следующих выборок можно считать правдоподобными для этой случайной величины:

- 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
- 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1
- 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1
- 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0

Задание 2. Решите из [предыдущего семинара](#)

- Задание 4
- Задание 5
- Задание 6

Задание 3. Дана случайная выборка, состоящая из n наблюдений, из распределения с функцией плотности: $f(x) = p(1 - p)^{k-1}$ при $0 < p \leq 1$. Найдите оценку параметра p методом максимального правдоподобия (\hat{p}^{MLE}).

Задание 4. Дана случайная выборка, состоящая из n наблюдений, из распределения со следующей функцией плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\beta^2} \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right), & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите оценку параметра β методом максимального правдоподобия ($\hat{\beta}^{MLE}$).

Задание 5. Дана случайная выборка, состоящая из n наблюдений, из распределения с функцией плотности:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta}$$

при $0 < x < 1$; $\theta > 0$. Найдите оценку параметра θ методом максимального правдоподобия ($\hat{\theta}^{MLE}$).

Задание 6. Время ожидания клиента банка в очереди представляет сл.в., имеющую экспоненциальное распределение. Ниже в таблице приведены значения длительности ожидания клиентов (в минутах), собранные за день. Найдите оценку математического ожидания методом максимального правдоподобия.

Время ожидания	Количество клиентов
[0; 5)	10
[5; 10)	2
[10; 15)	6
[15; 20)	1
[20; ∞)	1

Бонусные задания

Задание 7. Дана случайная выборка, состоящая из n наблюдений, из распределения со следующей функцией плотности: $f(x) = \frac{1}{2\beta^3} x^2 \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right)$ при $x > 0$, $\beta > 0$. Найдите оценку параметра β методом максимального правдоподобия ($\hat{\beta}^{MLE}$).

Задание 8. Дана случайная выборка, состоящая из n наблюдений, из равномерного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите оценку параметра θ методом максимального правдоподобия ($\hat{\theta}^{MLE}$).

Задание 9. Выведите в общем виде 95%-ый доверительный интервал для MLE-оценки математического ожидания в распределении Пуассона, если известно, что оценка дисперсии MLE-оценки (не только для распределения Пуассона, а в целом) рассчитывается следующим образом:

$$\widehat{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{-(likelihood(\hat{\theta}))''}$$

Задание 10. Выведите в общем виде 95%-ый доверительный интервал для MLE-оценки параметра rate экспоненциального распределения.